Двумерная гравитация Джакива-Тейтельбойма в метрическом виде

Хайруллин Б. Р.

16 мая 2020 г.

Проблемы построения теории двумерной гравитации

Действие Гильберта-Эйнштейна топологически инвариантно в двумерии:

$$I_E = \int d^4x\sqrt{-g}R$$

$$G_{\mu\nu} \stackrel{def}{=} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \equiv 0$$

Действие Джакива - Тейтельбойма

Решением данной проблемы может стать рассмотрение действия Джакива-Тейтельбойма:

$$I = \int d^2x\sqrt{-g}(R - \Lambda)\eta,$$

Уравнения движения, следующие из действия Джакива-Тейтельбойма

Варьируя действие Джакива-Тейтельбойма по дилатону и метрике, получаем следующий набор уравнений:

$$R - \Lambda = 0 \tag{1}$$

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^2 + \frac{\Lambda}{2} g_{\mu\nu})\eta = 0 \tag{2}$$

Анализ уравнений

Так как действие Джакива-Тейтельбойма инвариантно относительно замены введённой системы координат, мы можем выбрать такую, в которой метрика примет конформно-плоский вид:

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \exp 2\sigma, \tag{3}$$

где $h_{\mu\nu} = diag(1, -1)$ - метрика Минковского. Для данной метрики символы Кристоффеля принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \partial_1 \sigma, \\ \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \partial_2 \sigma. \end{aligned} \tag{4}$$

Непосредственной свёрткой метрического тензора с тензором Риччи, выраженным через символы Кристоффеля, из (1) получаем уравнения Лиувилля:

$$\Box\sigma = \frac{\Lambda}{2}\exp 2\sigma, \tag{5}$$

$$\Box = h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu = \partial_1^2\sigma - \partial_2^2\sigma.$$

Его общее решение зависит от двух произвольных функций переменных $x^{\pm} = t \pm x$:

$$\exp 2\sigma = \frac{f'(x^-)g'(x^+)}{(1 - \frac{\Lambda}{8} fg)^2}. \qquad (6)$$

Однако остаточная координатная инвариантность позволяет фиксировать данные функции $f = x^-$, $g = x^+$:

$$\exp 2\sigma = \left[1 - \frac{\Lambda}{8}(t^2 - x^2)\right]^{-2}. \qquad (7)$$

Несложными преобразованиями уравнение, получившееся варьированием метрики, сводится к системе следующих уравнений:

$$(\nabla^2 - \Lambda)\eta = 0, \tag{8}$$

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^2)\eta = 0. \tag{9}$$

Обозначим $V_\mu \exp(2\sigma) = \partial_\mu \eta$. Второе из уравнений выше обретает следующий вид:

$$\nabla_\mu (V_\nu e^{2\sigma}) - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (V_\beta e^{2\sigma}) = 0. \qquad (10)$$

Непосредственной подстановкой индексов приходим к тому, что данное уравнение есть уравнение Киллинга:

$$\begin{cases} \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 = 0, \\ \partial_1 V_2 + \partial_2 V_1 = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Его решением является система с двумя неизвестными функциями от введённых ранее конических координат:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{2}\left[F(x^-) + G(x+)\right], \\ \\ V_2 = \dfrac{1}{2}\left[F(x^-) - G(x^+)\right]. \end{cases}$$

Однако вместе с уравнением (8) функции обретают определённый вид:

$$\begin{cases} F(t-x) = a_1 + a_2 + \dfrac{\Lambda\beta}{2}(t-x) + \dfrac{\Lambda(a_1 - a_2)}{8}(t-x)^2, \\ G(t+x) = a_1 - a_2 + \dfrac{\Lambda\beta}{2}(t+x) + \dfrac{\Lambda(a_1 + a_2)}{8}(t+x)^2 \end{cases}$$

Скалярное поле принимает вид

$$\eta = \frac{a_\nu x^\nu + \beta \left[1 + \frac{\Lambda}{8}(t^2 - x^2)\right]}{1 - \frac{\Lambda}{8}(t^2 - x^2)}. \tag{12}$$

Как мы видим, в данной теории отсутствует функциональный произвол, то есть все функции определены с точностью до конечного набора констант.

Итоги

- Теория гравитации, развитая Эйнштейном, не может быть распространена на пространство-время размерности 2, т.к. в двумерии соответствующее действие топологически инвариантно
- Решением данной проблемы может стать введения дилатона - некоторого скалярного поля
- Из принципа наименьшего действия применительно к действию Джакива-Тейтельбойма можно найти как всю информацию о метрике пространства, так и определить дилатон с точностью до конечного набора констант